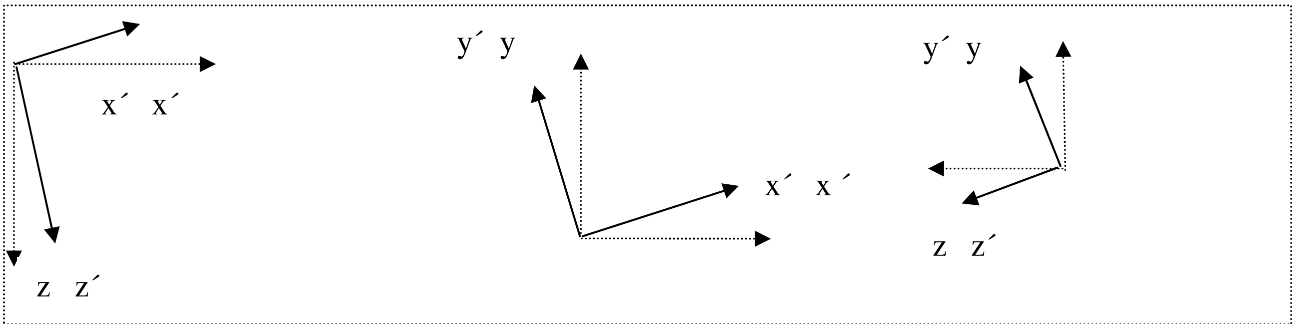
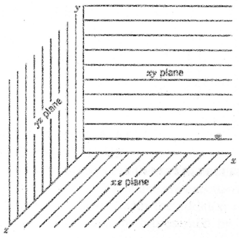
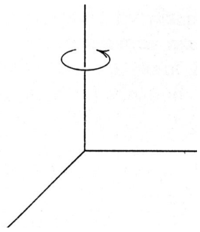
Curso de Computação Gráfica (CG) 2014/2- Cap 2 – parte 2
Transformações no espaço e projeções
Trabalho 5 (individual) - Gabarito

1- Mostre porque a matriz de rotação 3D em torno do eixo y precisa ter o valor do "**seno negativo**" onde as outras duas matrizes de rotação (em torno dos eixos x e z) têm "**valor positivo**". (1 pontos) .

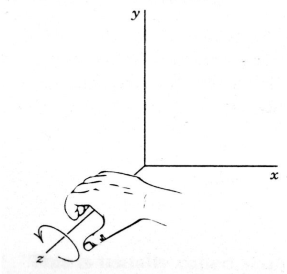
Como a orientação (e posição) que os dois eixos no plano (x,z) tomam ao se dar um ângulo de rotação positivo em torno do terceiro eixo (y) é oposta aos dois outros casos (ao se usar um sistema de eixos 3D positivo), esta orientação , de um ângulo positivo em torno do eixo y produz uma nova coordenada z´ negativa devido a rotação da antiga coordenada x de valor z´= –x sen θy e uma nova coordenada x´= z sen θy positiva. O oposto disto ocorre nos outros eixos, quando uma rotação positiva de θz produz y´= x sen θz e x´= - y sen θz ou uma rotação positiva em torno de x, θx , produz: z´= y sen θx ou y´= –z sen θx. Montando as matrizes correspondentes, chegamos a forma devida, onde o **sinal de menos** parece estar no lugar errado para esse eixo. Mas a expressão está correta como as demais. Veja isso nas figuras abaixo.







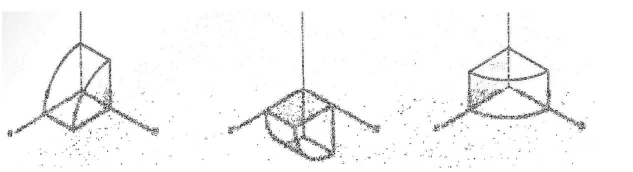
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

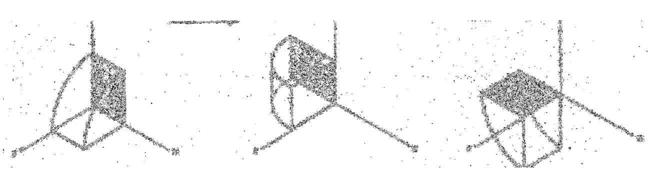


$$x^* = x$$
$$y^* = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z^* = y\sin\theta + z\cos\theta$$

$$[T_R]_x^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

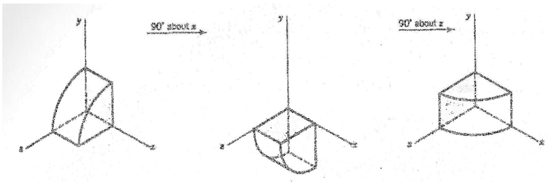
2- Olhe as 6 figuras abaixo: Considere que as 3 primeiras representem uma serie de 2 transformações e as 3 ultimas outra. Quais foram essas 2 transformações em cada caso? Descreva as matrizes que as produziriam. (1 pontos) .

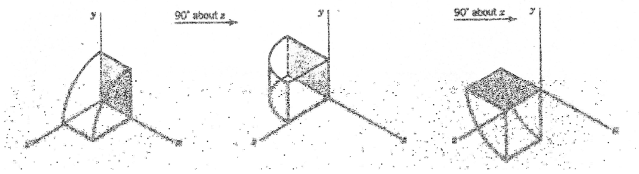




Rotação de 90 em x, seguida de uma rotação de 90 em z.

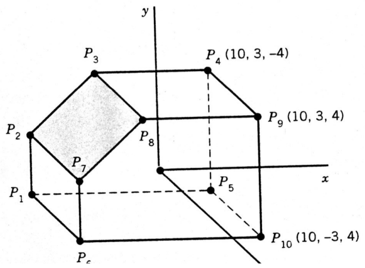
Rotação de 90 em z, seguida de uma rotação igual em x.





Observa-se que o resultado é completamente diferente, embora só se tenha alterado a ordem das rotações.
Para se obter esse resultados multiplicam-se em ordem opostas as matrizes de rotação em torno de x e z de 90 graus, no sentido positivo trigonométrico (isto é contrario aos ponteiros do relógio, olhando o eixo de frente)

3- Considere a geometria do objeto abaixo (isso é as coordenadas dos seus vértices) dada pela matriz P. Que transformações você deve submetê-lo para que os pontos P1, P5, P10 e P6 fiquem paralelos ao plano xy. Descreva a matriz que faria isso. Como ficaria a matriz de coordenadas do vértice do objeto quando transformada por ela. Desenhe o objeto na nova posição (2 pontos) .



$$[P] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & 1 & -4 & 1 \\ -8.5 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & -3 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 1 \\ -8.5 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer os pontos P1, P5, P10 e P6 paralelos ao plano xy deve-se dar um rotação de 90 graus em sentido anti horário , o que se faz pela matriz:

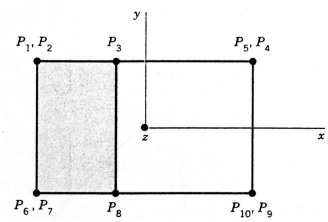
$$[T_R]_x^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com o valor do ângulo correto (90) se tem:

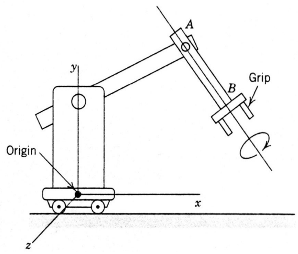
$$[T_R]_x^{90°} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A figura transformada fica com as coordenadas mostradas a baixo e na forma desenhada :

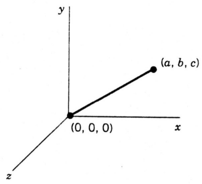
$$[P^*] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & 1 & -4 & 1 \\ -8.5 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & -3 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 1 \\ -8.5 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & 1 & 1 \\ -8.5 & 4 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & -3 & 1 \\ -10 & -4 & -3 & 1 \\ -10 & -4 & 1 & 1 \\ -8.5 & -4 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



4- Imagine que você quer fazer a animação do braço de robô abaixo que roda em torno do elemento indicado pelas letras AB, no sentido (positivo) mostrado pela seta curva. Como você descreveria essa rotação, sabendo que cada elemento articulado tem o mesmo comprimento *l*. (3 pontos) .



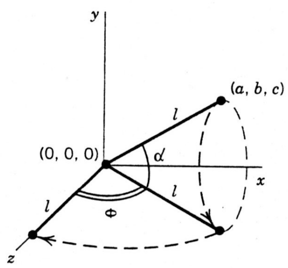
Vamos supor que as coordenadas de A são X_1,Y_1,Z_1 e as de B : X_2,Y_2, Z_2 = ($X_2 - X_1 = a$, $Y_2 - Y_1 = b$, $Z_2 - Z_1 = c$) . Vamos primeiro passar o ponto A para a origem do sistema de eixos.

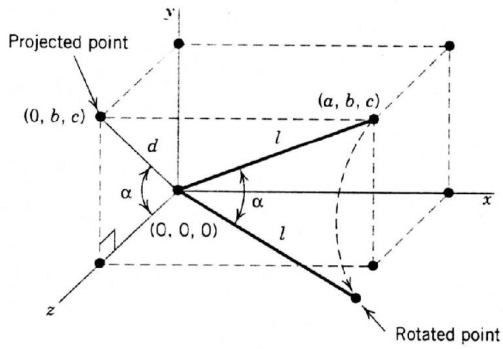


Isto é transladá-lo de modo que fique na origem (0,0,0). Isto será dado pela matriz de translação:

$$[T_{TR}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & -z_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Depois precisamos alinhar o eixo com um dos principais, vamos escolher aqui alinhá-lo com o eixo z, de modo que estabeleceremos uma rotação em torno do eixo x e outra em torno do eixo y. Para estabelecer uma rotação em torno do x é necessário calcular o ângulo de rotação α. A figura abaixo ajuda a ver como esse ângulo pode ser obtido. Através do calculo da projeção do eixo no plano YZ. Desta projeção podemos calcular o seno e cosseno deste ângulo.





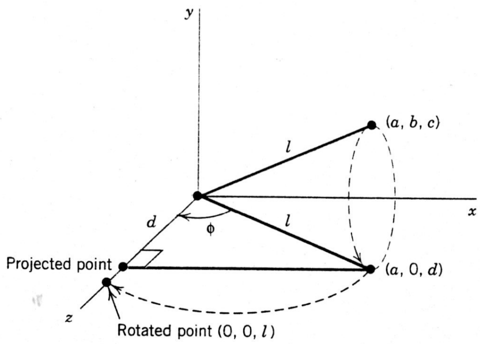
$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c}{d}$$

De modo que a matriz de rotação no sentido positivo trigonométrico (ou contrario a direção dos ponteiros do relógio) em torno de x pode ser escrita como .

$$[T_R]_x^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/d & b/d & 0 \\ 0 & -b/d & c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos chamar de φ o ângulo de rotação em torno de y, esse pode ser obtidos como mostra o esquema:



$$\sin \phi = \frac{a}{l}$$

$$\cos \phi = \frac{d}{l}$$

Note que :

$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e d = $\sqrt{b^2 + c^2}$.]

Ou seja podemos escrever:

$$l^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad l^2 = a^2 + d^2$$

ou

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + d^2$$

O que resulta:

$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$

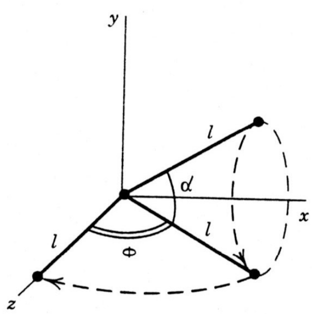
de modo que a matriz de rotação em y fica:

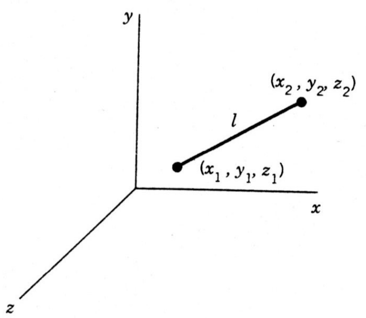
$$[T_R]_y^\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/l & 0 & a/l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a/l & 0 & d/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Depois é ao palicar a matriz de rotação genérica em torno do eixo z:

$$[T_R]_z^\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicar todas as rotações de posicionamento novamente, em sentido inverso e fazer o mesmo com a translação da origem para a posição do ponto A inicial



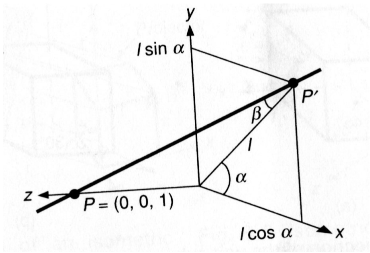


O resultado corresponde a multiplicação de todas essas matrizes, isto é de ida para o origem e volta para a posição inicial.

5- Encontre a matriz de projeção oblíqua cavaleira que tenha aparência do terceiro eixo formar -30° com a horizontal. Use-a para projetar o objeto com forma de "escadinha" cujas coordenadas aparecem nos slides da aula de projeção paralela (Aula 6). Desenha esse objeto com as coordenadas projetadas. (1 pontos) .

Esse objeto tem as coordenadas inicias:

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

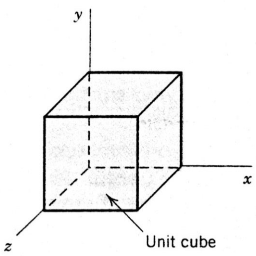
Para resolver o problema deve-se apenas substituir os valores de l=1 e -30 graus na triz dada em sala de aula. E multiplicar pelas coordenadas do objeto. Obtém assim as novas coordenadas e deve-se desenhar o objeto. Finalizando a questão.

6- Qual é a matriz de projeção com 1 ponto de fuga e centro de projeção na posição (x_{cp}, y_{cp}, z_{cp}). (1 pontos) .

Se considerarmos projeção no plano z (o que é o default pois se considera x,y as coordenadas 2D) em geral, teremos essa resposta depois de considerarmos a matriz projeção com um ponto de fuga e centro de projeção em (0 , 0 , z_{cp}) translada para o origem isto é de (- x_{cp}, - y_{cp}, 0) multiplicado pela que foi deduzida em sala e depois transladada de (x_{cp}, y_{cp}, 0). O resultado produz a matriz:

1	0	0	0
0	1	0	0
- x_{cp} / z_{cp}	- y_{cp} / z_{cp}	0	-1/ z_{cp}
0	0	0	1

7 – Considere um cubo unitário com 3 arestas coincidentes com o sistema de eixos. Defina uma matriz que o projete no plano z=0 depois de girá-lo de 30° em torno do eixo *y*, transladá-lo de *y= 3, z= -3* e transformá-lo em perspectiva com centro de projeção em (0, 0, 2). De a matriz de coordenadas dos vértices deste cubo. Quantos pontos de fuga essa transformação têm? (1 pontos) .



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \frac{\sin\theta}{z_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \frac{-\cos\theta}{z_{cp}} \\ 0 & m & 0 & \left(1 - \frac{n}{z_{cp}}\right) \end{bmatrix}$$

O cubo passara a parecer com 2 pontos de fuga pois na posição correspondente as projeções na matriz de coordenadas homogêneas final há 2 elementos não nulo, isso á na primeira e terceira linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0 & 0.250 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.433 \\ 0 & 3 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3.0 & 0 & 2.5 \\ 0.866 & 3.0 & 0 & 2.75 \\ 0.866 & 4.0 & 0 & 2.75 \\ 0 & 4.0 & 0 & 2.5 \\ 0.5 & 4.0 & 0 & 2.07 \\ 0.5 & 3.0 & 0 & 2.07 \\ 1.37 & 3.0 & 0 & 2.32 \\ 1.37 & 4.0 & 0 & 2.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 0 & 1 \\ 0.315 & 1.1 & 0 & 1 \\ 0.315 & 1.455 & 0 & 1 \\ 0 & 1.6 & 0 & 1 \\ 0.242 & 1.935 & 0 & 1 \\ 0.242 & 1.451 & 0 & 1 \\ 0.59 & 1.295 & 0 & 1 \\ 0.59 & 1.727 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$